

Misura, Incertezza, Taratura

Analisi Dati e Statistica, 2025–26



Paolo Bosetti

Università di Trento, Dipartimento di Ingegneria Industriale

Ultimo aggiornamento: 17/06/2026

Indice

1	Misura	2
1.1	Incertezza	3
1.2	Norma UNI4546	3
1.3	Norma UNI4546	4
1.4	Norma UNI4546	4
1.5	Norma GUM (ISO/IEC 98-3:2008)	4
1.6	Norma GUM (ISO/IEC 98-3:2008)	5
1.7	Incertezza standard	5
1.8	Norma GUM (ISO/IEC 98-3:2008)	5
1.9	Fattore di copertura	6
1.10	Modello statico di uno strumento di misura	7
1.11	Taratura	7
1.12	Taratura	9
1.13	Ingressi di disturbo	10
1.14	Esempio: dinamometro a mensola	10
1.15	Esempio: dinamometro a mensola	11
1.16	Casualizzazione della sequenza di taratura	12
1.17	Taratura del dinamometro (senza casualizzazione)	12
1.18	Taratura del dinamometro (senza casualizzazione)	14
1.19	Taratura del dinamometro (senza casualizzazione)	15
1.20	Taratura del dinamometro (con casualizzazione)	17
1.21	Taratura del dinamometro (con casualizzazione)	19
2	Propagazione dell'incertezza	21
2.1	Basi	21
2.2	Metodo analitico	21
2.3	Metodo analitico	22
2.4	Metodo analitico	22

2.5 Metodo analitico	22
2.6 Esempio: volume di un cilindro	23
2.7 Metodo Monte Carlo	23
2.8 Esempio: volume di un cilindro	24
2.9 Esempio: volume di un cilindro	26
2.10 Esempio: volume di un cilindro	27

```
options(width = 60)
set.seed(0)
library(latex2exp)
library(glue)
library(tidyverse)
```

```
— Attaching core tidyverse packages — tidyverse
2.0.0 —
✓ dplyr      1.2.1    ✓ readr      2.2.0
✓ forcats   1.0.1    ✓ stringr    1.6.0
✓ ggplot2   4.0.3    ✓ tibble     3.3.1
✓ lubridate 1.9.5    ✓ tidyr      1.3.2
✓ purrr     1.2.2
— Conflicts —
tidyverse_conflicts() —
* dplyr::filter() masks stats::filter()
* dplyr::lag()     masks stats::lag()
i Use the conflicted package (<http://conflicted.r-lib.org/>) to force all conflicts to become errors
```

```
library(modelr)
theme_set(theme_gray()+theme(legend.position =
"bottom"))
```

1 Misura

Un'operazione di **misura** è alla base di qualsiasi **creazione di valore** ed è fondamentale in qualsiasi ambito scientifico e ingegneristico

Una **misurazione** può essere ottenuta con uno strumento più o meno “buono”

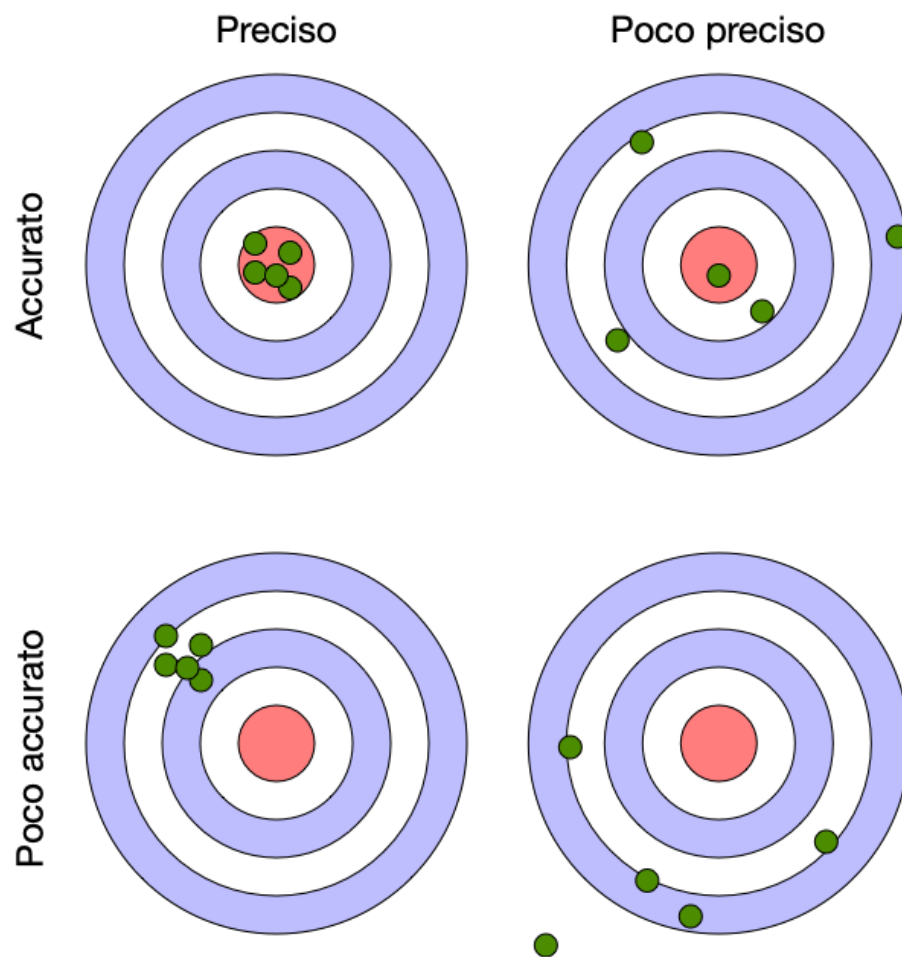
La “bontà” di uno strumento è precisamente definita come la sua **incertezza**, che è un termine statistico

1.1 Incertezza

Incetezza, precisione, accuratezza

- L'incertezza è l'inverso della **precisione**, a sua volta sinonimo di **ripetibilità**
- L'**accuratezza** è sinonimo di mancata polarizzazione

È meglio avere uno strumento preciso o accurato?



1.2 Norma UNI4546

Introdotta nel 1984, dà alcune **definizioni**:

Definizioni

- **Misurazione**: l'atto del misurare, assegnare valori numerici a grandezze fisiche

- **Parametro**: grandezza di un sistema fisico alla quale assegnare valori numerici
- **Misurando**: un parametro sottoposto a misurazione
- **Misura**: il risultato di una misurazione
- **Metrologia**: disciplina che riguarda la **qualità** delle misure

1.3 Norma UNI4546

Una **misura**, che è il risultato di una **misurazione**, rappresenta un parametro di un sistema considerato **in un determinato stato**

È una terna costituita da:

1. un valore
2. un'incertezza
3. un'**unità di misura**

Ad esempio: la mia statura è 183 ± 0.5 cm

Esistono due tipi di grandezze:

- **estensive**, per cui vale la somma (lunghezze, correnti elettriche, velocità)
- **intensive**, esprimono un ordine e non vale la somma (pressioni, temperatura)

1.4 Norma UNI4546

- Misurazione **diretta**: ottenuta per confronto diretto con un campione noto
- Misurazione **indiretta**: si misurano grandezze secondarie collegate a quella di interesse mediante un **modello**

Nel caso di misurazione indiretta, lo strumento di misura è basato su un **trasduttore**: un dispositivo che trasforma una grandezza fisica in ingresso in un'altra grandezza (es. forza in carica elettrica)

Un **modello** è un insieme di relazioni tra parametri descrivente le interazioni (m. **statico**) e possibilmente l'evoluzione nel tempo (m. **dinamico**) di un sistema

Un modello può essere **analitico** o **numerico**

1.5 Norma GUM (ISO/IEC 98-3:2008)

Guide to the expression of Uncertainty in Measurement è il riferimento normativo per la terminologia e i metodi di calcolo dell'incertezza nelle misurazioni

L'incertezza è parte integrante di una misura; senza incertezza la misura non è valida

Il modello di misura deve essere costruito sulla base della misura stessa: non deve essere necessariamente esaustivo né basato sulla comprensione fisica del sistema (cioè può anche essere **empirico**)

Secondo la GUM il risultato di una misurazione è una **variabile aleatoria** e va trattato in quanto tale

La GUM ha abolito i termini di **errore** (sostituito con incertezza) e di **valore vero** (sostituito con stima)

Cioè si assume che il valore vero di una grandezza **non sia conoscibile**: anche aumentando all'infinito la precisione di uno strumento, prima o poi si arriva a livello atomico, per cui vale il **principio di indeterminazione di Pauli**

Quindi, se non ha senso parlare di valore vero, allora non ha senso nemmeno parlare di errore di misura

1.6 Norma GUM (ISO/IEC 98-3:2008)

La GUM definisce:

Definizioni

- L'**incertezza standard** (*standard uncertainty*) u_x della variabile x come la deviazione standard del valor medio di x :

$$u_x = \frac{s_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

- L'**incertezza relativa** come rapporto tra l'incertezza standard e la media della variabile; è adimensionale e utile per confronti:

$$u_{x\text{rel}} = \frac{u_x}{|\bar{x}|}$$

1.7 Incertezza standard

l'**incertezza standard** può essere valutata

- mediante metodi statistici, come alla pagina precedente: in questo caso si parla di incertezza standard di **tipo A**
- mediante l'uso di tutte le informazioni rilevanti possibili: incertezza standard di **tipo B**; essa è preferibile quando non si disponga di campione sufficiente di misure

Per **informazioni rilevanti** si intende ad esempio:

- dati di precedenti misurazioni
- specifiche tecniche del costruttore dello strumento
- certificati di taratura
- esperienza o conoscenza generale degli strumenti di interesse

1.8 Norma GUM (ISO/IEC 98-3:2008)

Definizioni

Ricordando che l'**intervallo di confidenza** è definito come

$$P\left(-t_{n-1,\alpha/2} \leq \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_x/\sqrt{n}} \leq t_{n-1,\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

risulta che l'intervallo $\bar{x} \pm t_{\alpha/2,n-1} u_x$ contiene il valore atteso di x con una confidenza $1 - \alpha$

Quindi la GUM definisce anche:

- L'**incertezza estesa** come la semi-ampiezza dell'intervallo di confidenza su \bar{x} :

$$U_x = t_{\alpha/2,n-1} \frac{s_x}{\sqrt{n}} = t_{\alpha/2,n-1} u_x = k_{n-1} u_x$$

Il termine k_{n-1} è chiamato **fattore di copertura**, e dipende solo dalla dimensione del campione (è il quantile della distribuzione T di Student).

1.9 Fattore di copertura

Ricordare che per $n > 50$ i quantili della normale e della T di Student sono indistinguibili a livello pratico

Per questo motivo, per campioni sufficientemente grandi la GUM consente di adottare i fattori di copertura ricavati dai quantili di $\mathcal{N}(0, 1)$

Salvo indicazioni, per esprimere una misura si usa sempre l'**incertezza standard** ($27.5 \pm 0.1 \text{mm}$, in cui $u_x = 0.1$)

```
tibble(
  conf=c(0.6827, 0.9, 0.95, 0.9545, 0.99, 0.9973),
  alpha = 1-conf,
  k=qnorm(alpha/2, lower.tail = F)
) %>%
  mutate(conf = paste0(as.character(conf*100), "%"))
%>%
  knitr::kable(col.names=c("Livello di confidenza",
                           "$\\alpha$",
                           "Fattore di copertura"),
              align=c("r", "r", "r"),
              digits=4)
```

Livello di confidenza	α	Fattore di copertura
68.27%	0.3173	1.0000

Livello di confidenza	α	Fattore di copertura
90%	0.1000	1.6449
95%	0.0500	1.9600
95.45%	0.0455	2.0000
99%	0.0100	2.5758
99.73%	0.0027	3.0000

Se si usa l'**incertezza estesa** è necessario accompagnarla dal **livello di confidenza** ($27.5 \pm 0.1 \text{mm}$ al 95%)

1.10 Modello statico di uno strumento di misura

Nel caso di **misurazioni indirette**, è fondamentale disporre di un modello che descriva il comportamento del trasduttore, cioè la relazione tra uscita e ingresso

Ogni modello dipende da uno o più parametri numerici che devono essere identificati

Questa operazione di identificazione dei parametri del modello di misura si chiama **taratura**

La taratura punta a definire la correlazione $y = f(m)$ tra l'ingresso misurando m e l'uscita del trasduttore y , e la relativa **incertezza**. La $f(\cdot)$ è detta **caratteristica statica dello strumento**

D'ora in avanti considereremo solo il caso di **sistemi statici**, cioè in stato stazionario, per i quali **il tempo non è una variabile di modello**

I **sistemi dinamici** verranno presi in considerazione nel secondo modulo di questo corso

1.11 Taratura

Uno strumento fornisce la misura mediante **inversione della caratteristica statica**: $m = f^{-1}(y)$

Perché la $f(\cdot)$ sia nota è necessario identificarne i parametri mediante **regressione**

La regressione viene effettuata a partire da una serie di coppie (m_i, y_i) ottenute:

- da una serie di **misurandi noti** m_i

Per campioni con meno di 50 elementi è opportuno calcolare il fattore di copertura come $t_{\alpha/2, n-1}$

Si parla di **taratura statica o dinamica** per una operazione di misurazione statica o dinamica, rispettivamente

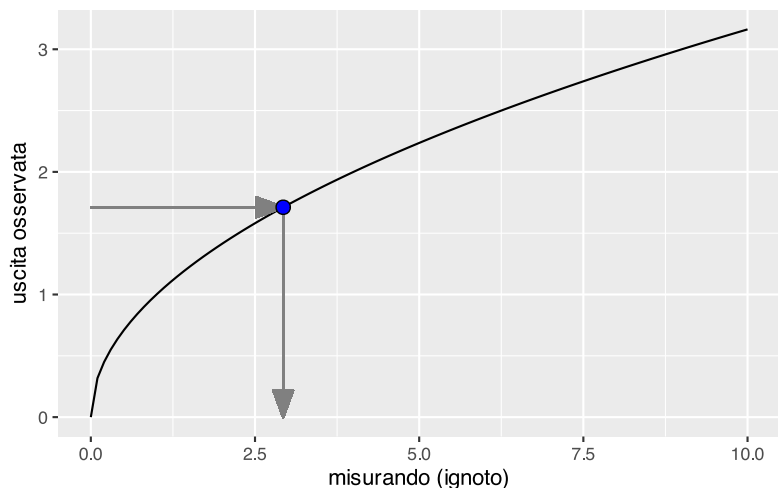
- da una serie di misurazioni y_i ottenute con uno strumento di qualità migliore di quello in taratura

1.11.a Misurazione

```
df <- tibble(
  i=1:100,
  x=seq(0,10,length.out=length(i)),
  y=sqrt(x),
  s=F
)
df[df$i%%10==0,]$s <- T

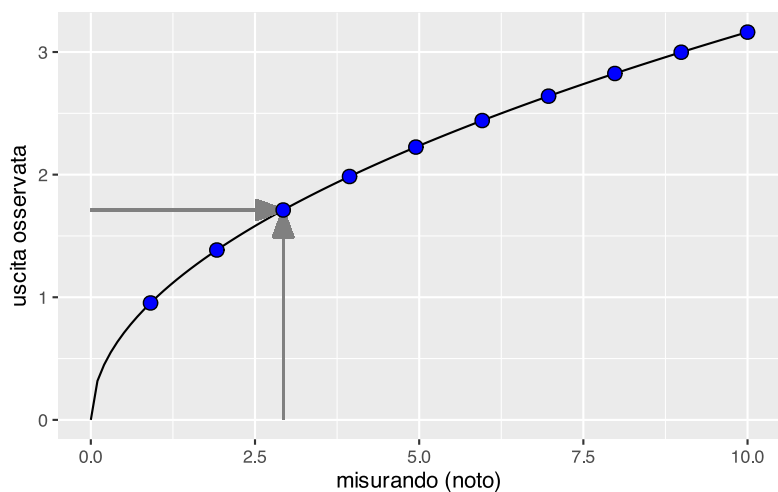
p1 <- df %>% ggplot(aes(x=x, y=y)) +
  geom_line() +
  labs(x="misurando (ignoto)", y="uscita osservata")

point <- filter(df, i==30)
arw <- arrow(angle=20, type="closed", length=unit(0.2,
"_inches"))
p1 +
  geom_segment(xend=point$x, yend=0, x=point$x,
y=point$y, arrow=arw, color=gray(0.5)) +
  geom_segment(xend=point$x, yend=point$y, x=0,
y=point$y, arrow=arw, color=gray(0.5)) +
  geom_point(data=point, size=3, color="black",
fill="blue", shape=21)
```



1.11.b Taratura

```
point <- filter(df, i==30)
p1 +
  geom_segment(x=point$x, y=0, xend=point$x,
yend=point$y, arrow=arw, color=gray(0.5)) +
  geom_segment(xend=point$x, yend=point$y, x=0,
y=point$y, arrow=arw, color=gray(0.5)) +
  geom_point(data=filter(df, s), size=3,
color="black", fill="blue", shape=21) +
  labs(x="misurando (noto)", y="uscita osservata")
```



Per “strumento migliore” si intende uno strumento con una precisione migliore di almeno un ordine di grandezza

1.12 Taratura

Una **taratura statica** si sviluppa quindi su quattro passaggi:

1. **sviluppo del modello dello strumento**: mediante analisi dei principi fisici si definisce la caratteristica statica come relazione (analitica, numerica o mista) tra ingresso e uscita. Idealmente, un modello completo comprende anche gli **ingressi di disturbo**
2. **raccolta dei dati di taratura**: una campagna sperimentale fornisce le coppie (m_i, y_i) , che **vanno raccolte con m in ordine casuale**
3. **regressione**: si identificano i parametri del modello
4. **validazione del modello**: si verifica l'adeguatezza del modello regredito mediante analisi dei residui

La taratura deve anche definire l'**incertezza** dello strumento, dovuta:

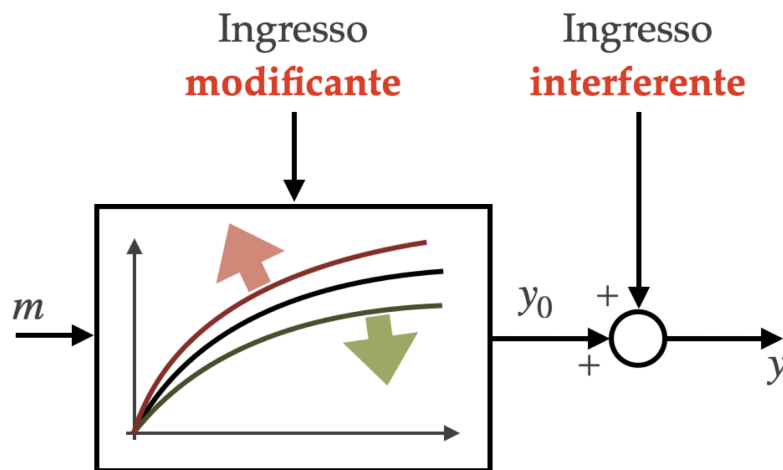
- al modello (la *forma* della caratteristica statica)

- ai parametri del modello
- alla stima del misurando (dovuta a ingressi di disturbo)

1.13 Ingressi di disturbo

Gli ingressi fonte di incertezza possono essere:

- **ingressi modificanti**: modificano la caratteristica statica, per cui ad uno stesso valore di m possono corrispondere diversi valori di y per via di un cambiamento della **forma** di $f(\cdot)$ o del valore dei parametri (ad es. effetto della temperatura)
- **ingressi interferenti**: si sommano direttamente all'uscita dello strumento, per cui $y = f(m) + y_d$, e hanno tipicamente un carattere stocastico (ad es. vibrazioni, disturbi elettrici)



1.14 Esempio: dinamometro a mensola

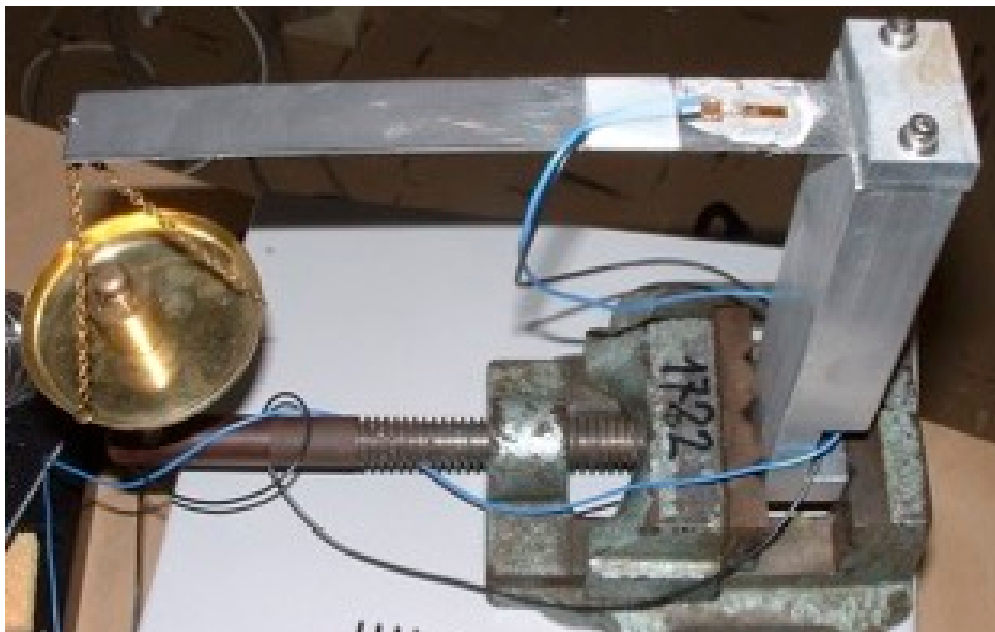
È uno strumento per la misura della **forza peso** che sfrutta:

- l'elasticità di una trave snella per convertire una forza in una deformazione
- un estensimetro per convertire una deformazione in una variazione di resistenza
- un circuito elettrico con voltmetro per convertire la variazione di resistenza in variazione di corrente, mediante **amplificazione**

Il modello dello strumento fornisce:

L'incertezza si riferisce solo alla componente aleatoria e non prevedibile della misura; si assume che ogni componente di deviazione sistematica sia già stato corretto

1.14.a Dinamometro



1.14.b Amplificatore



$$V = 3/2GV_i \frac{lG_F}{EBH^2} F + V_0 = V_0 + KF$$

1.15 Esempio: dinamometro a mensola

La caratteristica statica dello strumento dipende, oltre che dal misurando F , da altri 8 parametri

Per effettuare la taratura si tengono il più possibile costanti tutti i parametri, eccetto il misurando

I parametri che non è possibile mantenere costanti si accetta che fluttuino, ripetendo le misurazioni e mediando i risultati: si parla di **controllo statistico del processo di taratura**, che mitiga l'effetto degli **ingressi interferenti**

È la condizione in cui si applica il **teorema del limite centrale**

Gli **ingressi modificanti** sono più complessi da trattare e richiedono una modifica del modello e il passaggio da uno strumento di misura a un **sistema di misura**

Ad esempio, **la temperatura** può influire su tutti i parametri della caratteristica statica: se affianco uno strumento di misura della temperatura e arricchisco il modello con la dipendenza dalla temperatura, posso **compensare l'effetto** degli ingressi modificanti

Un **sistema di misura** è costituito da più strumenti che lavorano assieme

1.16 Casualizzazione della sequenza di taratura

Compensare l'effetto degli ingressi modificanti durante la taratura può non essere semplice o economico

Se però raccolgo le coppie (m_y, y_i) in ordine casuale anziché in ordine di m_i , ottengo il risultato di **distribuire casualmente** l'effetto degli ingressi modificanti

In questo modo trasformo gli ingressi modificanti in **ingressi interferenti**, dei quali posso mitigare l'effetto mediante **controllo statistico**

Confrontiamo ora la taratura del dinamometro a mensola effettuata **senza casualizzazione** e con casualizzazione, nel caso di un ingresso modificante (la temperatura) non preso in considerazione dall'operatore

1.17 Taratura del dinamometro (senza casualizzazione)

Nel laboratorio di taratura, dopo 4 ore dall'inizio del processo di taratura, il termostato viene modificato e la temperatura comincia a variare tra 20°C e 25°C

L'addetto alla calibrazione **non si accorge** del cambiamento **né registra la temperatura**

```

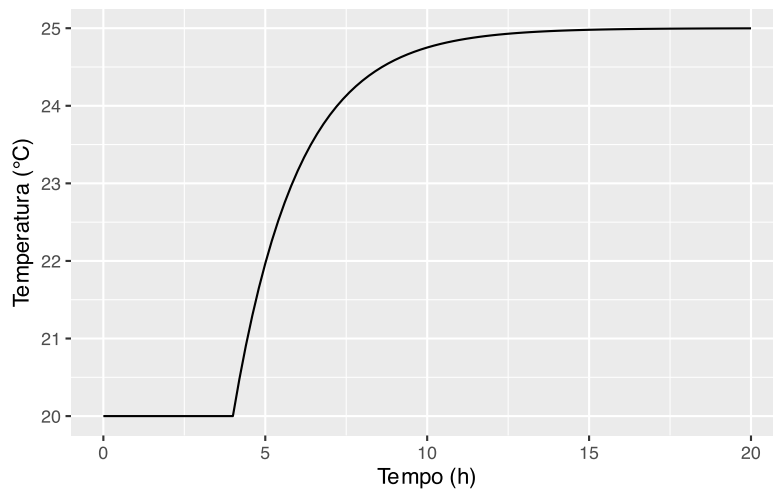
set.seed(120)
parameters <- list(
  G=10,
  Vi=12,
  l=300,
  E=200,
  B=20,
  H=2,
  V0=1
)
Gf <- function(Temp, G0=0.05, T0=20, k=0.01) G0 +
k*(Temp-T0)
K <- function(Temp, params) with(params,
3/2*G*Vi*(l*Gf(Temp))/(E*B*H^2))
model <- function(F, Temp, params) K(Temp, params) *
F + params$V0
temp <- function(time, t0=4, T0=20, dT=5, tau=2)
ifelse(time<t0, T0, T0+dT*(1-exp(-(time-t0)/tau)))
N <- 50
duration <- 8
data <- tibble(
  t = seq(0, duration, length.out=N),
  Temp = temp(t),
  Gf = Gf(Temp),
  Force = seq(10, 100, length.out=N),
  Vn = model(Force, Temp, parameters),
  V=Vn+rnorm(length(t), 0, 0.5)
)
data.lm <- lm(V~Force, data=data)
data <- add_predictions(data, data.lm, var="pred.nr1")
data <- add_residuals(data, model=data.lm,
var="res.nr1")

```

```

tibble(x=seq(0, 20, length.out=100)) %>%
ggplot(aes(x)) +
  geom_function(fun=temp) +
  labs(x="Tempo (h)", y="Temperatura (°C)")

```



1.18 Taratura del dinamometro (senza casualizzazione)

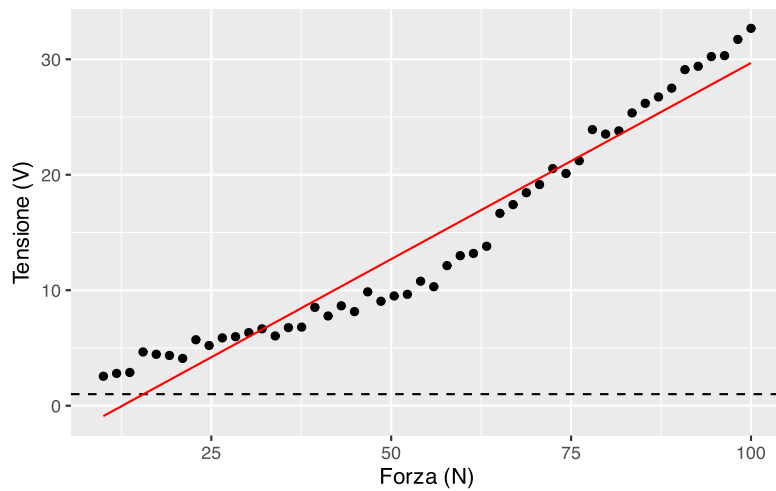
L'addetto registra la tensione in uscita in corrispondenza di 50 valori di forza applicati, variabili tra 10 N e 100 N, **in ordine crescente della forza**

Dato che il modello dello strumento prevede una relazione lineare $V = V_0 + KF$, l'addetto effettua una regressione lineare

Lo studio dei residui però evidenzia un *pattern* con un minimo, per cui l'addetto **sospetta un sotto-adattamento** e quindi tenta una seconda regressione con un modello quadratico

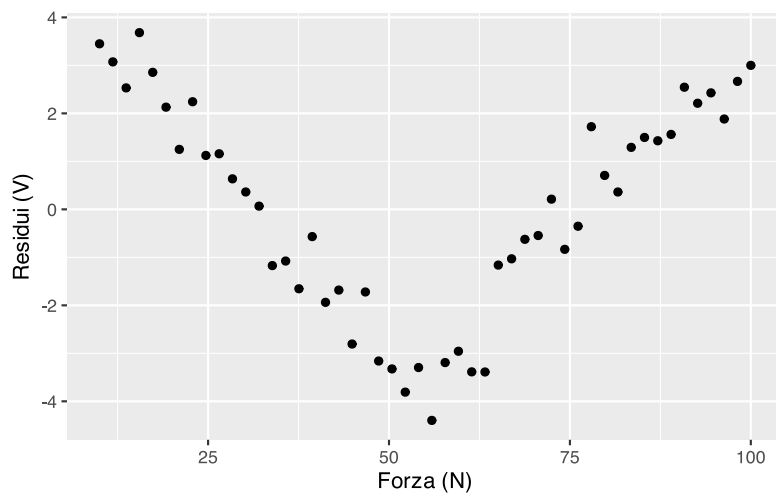
1.18.a Regressione

```
data %>% ggplot(aes(x=Force)) +
  geom_point(aes(y=V)) +
  geom_hline(yintercept=parameters$V0, linetype=2) +
  geom_line(aes(y=pred.nr1), color="red") +
  labs(x="Forza (N)", y="Tensione (V)")
```



1.18.b Residui

```
data %>%
  ggplot(aes(x=Force, y=res.nr1)) +
  geom_point() +
  labs(x="Forza (N)", y="Residui (V)")
```



1.19 Taratura del dinamometro (senza casualizzazione)

L'addetto verifica quindi una regressione con un modello di secondo grado

L'analisi dei residui lo soddisfa e quindi accetta la nuova caratteristica statica tarata come un polinomio di secondo grado

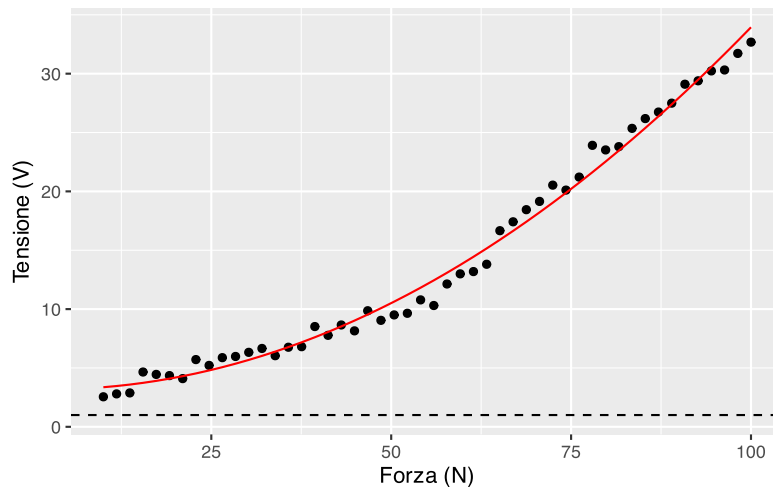
Nota: questa caratteristica ha perso la relazione con la fisica del problema ed è quindi **puramente empirica**

Tuttavia, dato che la variazione di temperatura **non è stata registrata né notata**, l'addetto non ha modo di accorgersi che la caratteristica così tarata è ovviamente sbagliata e in pratica inutilizzabile

1.19.a Regressione

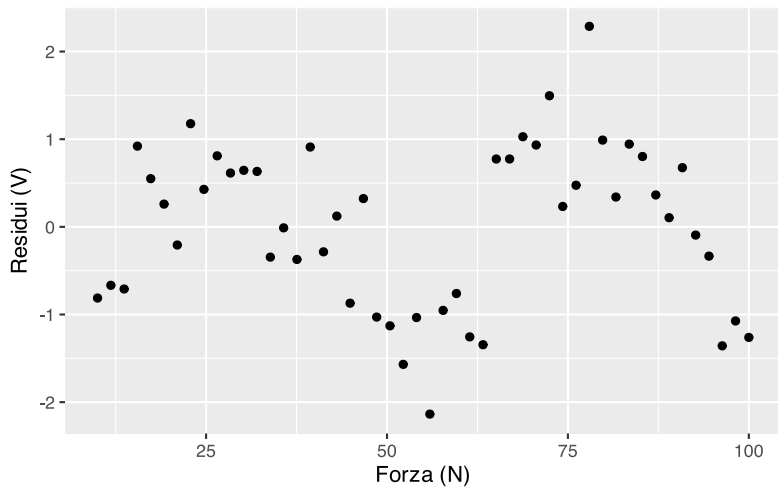
```
data.lm2 <- lm(V~poly(Force, degree=2, raw=T),
data=data)
data <- add_predictions(data, data.lm2,
var="pred.nr2")
data <- add_residuals(data, model=data.lm2,
var="res.nr2")

data %>% ggplot(aes(x=Force)) +
  geom_point(aes(y=V)) +
  geom_hline(yintercept=parameters$V0, linetype=2) +
  geom_line(aes(y=pred.nr2), color="red") +
  labs(x="Forza (N)", y="Tensione (V)")
```



1.19.b Residui

```
data %>%
  ggplot(aes(x=Force, y=res.nr2)) +
  geom_point() +
  labs(x="Forza (N)", y="Residui (V)")
```



1.20 Taratura del dinamometro (con casualizzazione)

Rivediamo cosa sarebbe successo raccogliendo le coppie (m_i, y_i) in **ordine casuale**

In questo caso l'effetto di aumento della temperatura è nullo sulle coppie raccolte (con valori casuali di $m_i!$) prima di 4 ore; successivamente questo effetto si distribuisce casualmente su tutti i valori del misurando (diventa un ingresso interferente)

La regressione lineare di primo grado questa volta è adatta, anche se la varianza non è costante

Tuttavia, osservando i **residui in funzione del tempo** si nota che a circa 4 ore inizia a succedere qualcosa che fa aumentare i residui

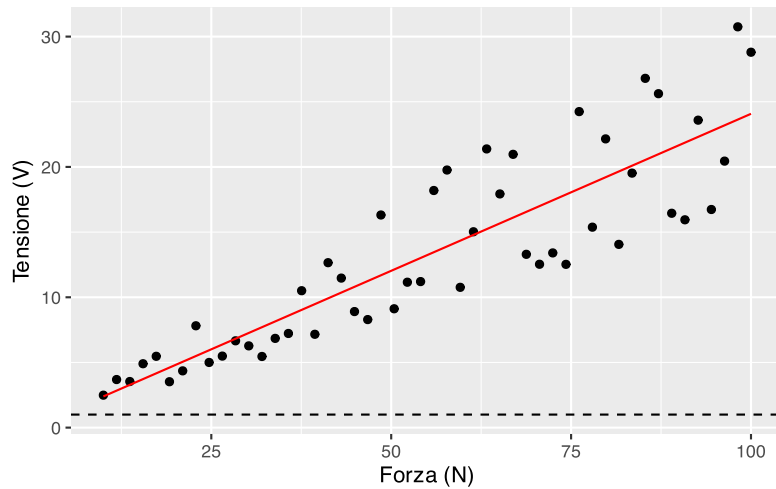
1.20.a Regressione

```
set.seed(120)
data <- data %>% mutate(
  Force = sample(Force),
  Vn = model(Force, Temp, parameters),
  V=Vn+rnorm(length(t), 0, 0.5)
)
data.lm3 <- lm(V~Force, data=data)
data <- add_predictions(data, data.lm3, var="pred.r")
data <- add_residuals(data, data.lm3, var="res.r")

data %>% ggplot(aes(x=Force)) +
  geom_point(aes(y=V)) +
```

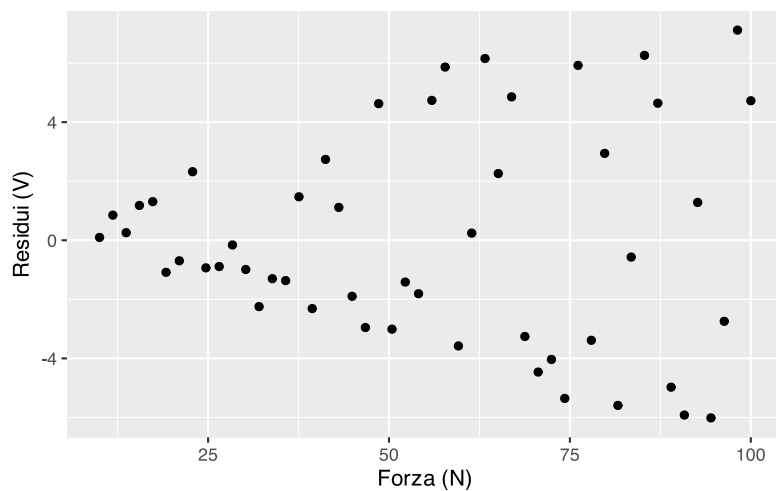
I residui non sono del tutto privi di pattern (andamento a "M"). Tuttavia, aumentando il grado della regressione si può raggiungere un livello (grado 6) in cui i residui sono effettivamente privi di pattern, ma ciò tuttavia non invalida quanto sopra detto

```
geom_line(aes(y=pred.r), color="red") +
geom_hline(yintercept=parameters$V0, linetype=2) +
labs(x="Forza (N)", y="Tensione (V)")
```



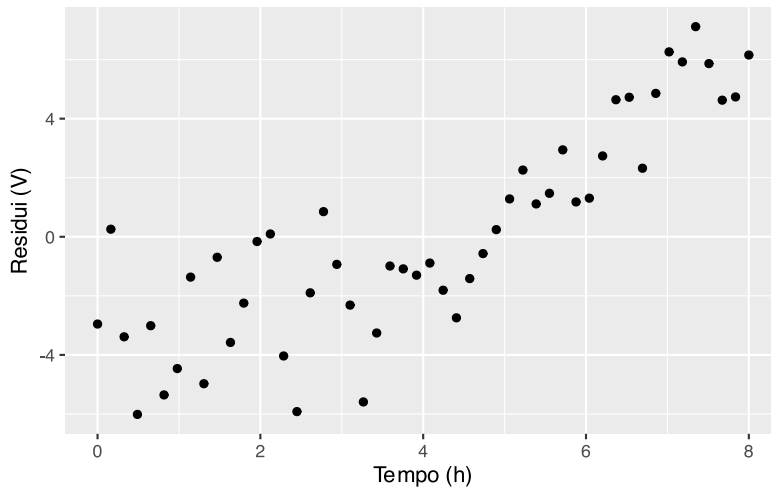
1.20.b Residui (F)

```
data %>%
  ggplot(aes(x=Force, y=res.r)) +
  geom_point() +
  labs(x="Forza (N)", y="Residui (V)")
```



1.20.c Residui (t)

```
data %>%  
  ggplot(aes(x=t, y=res.r)) +  
  geom_point() +  
  labs(x="Tempo (h)", y="Residui (V)")
```



1.21 Taratura del dinamometro (con casualizzazione)

Se variamo il colore dei punti in funzione del tempo in cui sono state effettuate le singole prove, osserviamo che c'è una fascia di punti in basso con **andamento lineare e varianza costante**, tutti raccolti a meno di 4 ore dall'inizio

Scartando dalla regressione tutti i punti raccolti dopo 4 ore, otteniamo una regressione lineare con residui stretti e regolari

La caratteristica statica così identificata rappresenta correttamente il comportamento dello strumento a 20°C

1.21.a Regressione

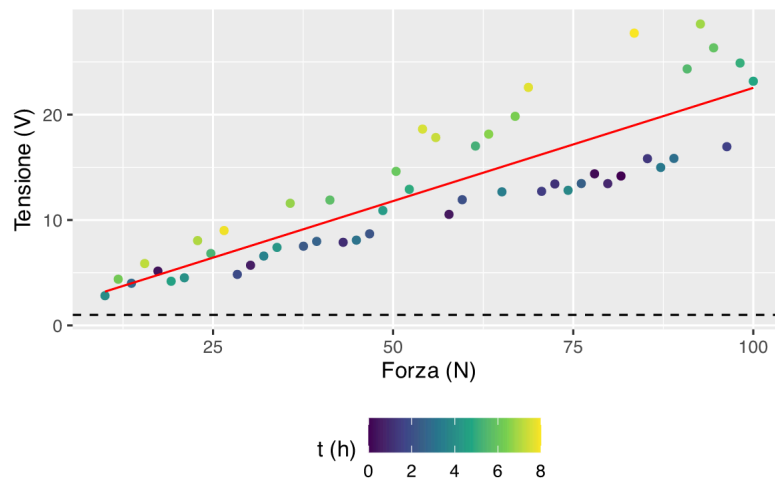
```
set.seed(120)  
data <- data %>% mutate(  
  Force = sample(Force),  
  Vn = model(Force, Temp, parameters),  
  V=Vn+rnorm(length(t), 0, 0.5)  
)  
data.lm3 <- lm(V~Force, data=data)  
data <- add_predictions(data, data.lm3, var="pred.r")
```

```

data <- add_residuals(data, data.lm3, var="res.r")

data %>% ggplot(aes(x=Force)) +
  geom_point(aes(y=V, color=t)) +
  geom_line(aes(y=pred.r), color="red") +
  geom_hline(yintercept=parameters$V0, linetype=2) +
  scale_color_viridis_c() +
  labs(x="Forza (N)", y="Tensione (V)", color="t (h)")

```



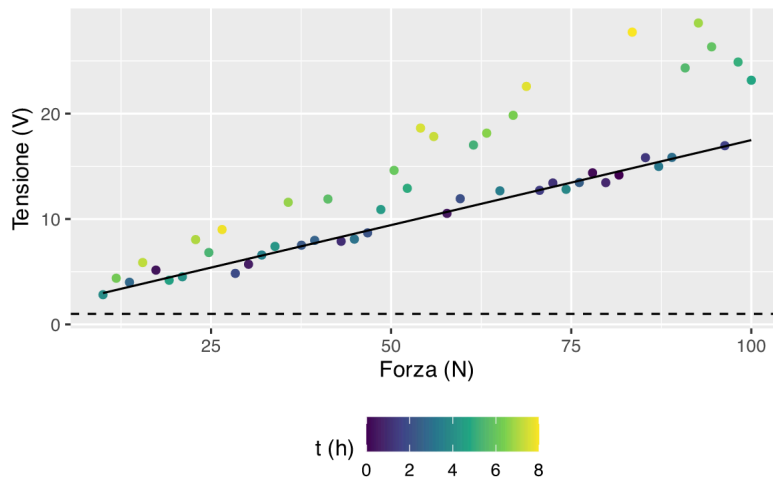
1.21.b Regressione $t < 4$ h

```

data.lm4 <- lm(V~Force, data=data %>% filter(t<4))
data <- add_predictions(data, data.lm4, var="pred.r4")
data <- add_residuals(data, data.lm4, var="res.r4")

data %>% ggplot(aes(x=Force)) +
  geom_point(aes(y=V, color=t)) +
  geom_line(aes(y=pred.r4)) +
  geom_hline(yintercept=parameters$V0, linetype=2) +
  scale_color_viridis_c() +
  labs(x="Forza (N)", y="Tensione (V)", color="t (h)")

```



Secondo la **Norma ISO 1**, tutte le misure vanno riferite alla temperatura di 20°C

2 Propagazione dell'incertezza

In certi casi è necessario valutare l'incertezza di una **misura derivata**, cioè costruita per combinazione di altre misure

2.1 Basi

Supponiamo di voler misurare la velocità media di un veicolo in un tratto di strada

Possiamo esprimere la velocità come rapporto tra la distanza percorsa d e il tempo impiegato t :

$$v = \frac{d}{t}$$

Sia la misura di distanza che quella di tempo sono accompagnate da una loro incertezza standard

Qual è l'**incertezza standard sulla misura indiretta** di velocità?

Secondo la GUM può essere determinata in due modi:

- analitico, mediante la **legge di propagazione dell'incertezza**
- numerico, mediante il **metodo Monte Carlo**

2.2 Metodo analitico

Sia $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$: vogliamo esprimere l'**incertezza tipo combinata** note che siano le u_1, u_2, \dots, u_n

Esprimiamo la variazione di y in un intorno di x_0 mediante **sviluppo in serie di Taylor** per una sola variabile x :

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{df}{dx} \Delta x + \frac{d^2 f}{dx^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{d^3 f}{dx^3} \frac{\Delta x^3}{3!} + o(\Delta x^3)$$

Nel caso di n variabili, e **arrestandosi al termine di primo grado**:

$$\begin{aligned} y &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\simeq f(\bar{x}_1 + \Delta x_1, \bar{x}_2 + \Delta x_2, \dots, \bar{x}_n + \Delta x_n) \\ &= f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - \bar{x}_i) \end{aligned}$$

2.3 Metodo analitico

Si noti che:

$$\begin{aligned} E(y) &= E\left(f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k) + \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - \bar{x}_i)\right) \\ &= E(f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k)) + \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_i} E(x_i - \bar{x}_i) \\ &= f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k) \end{aligned}$$

cioè il valore medio di $f(\cdot)$ è la stessa funzione applicata ai valori medi: $\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k)$

2.4 Metodo analitico

Possiamo quindi scrivere che:

$$\begin{aligned} E(y - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k)) &= E\left(\sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - \bar{x}_i)\right) \\ u_y^2 &= E((y - \bar{y})^2) = E\left(\left(\sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - \bar{x}_i)\right)^2\right) \\ u_y^2 &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u_{i,j}^2 \end{aligned}$$

dove $u_{i,j}$ è la **covarianza** $u_{i,j} = \text{Cov}(x_i, x_j) = E((x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j))$

2.5 Metodo analitico

Nel caso in cui le x_i siano tutte indipendenti, cioè $u_{i,j} = 0 \forall i \neq j$, vale la relazione semplificata:

$$u_y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u_i^2}$$

nota come **legge di propagazione delle incertezze** a partire dalle incertezze delle componenti (di **tipo A** o di **tipo B**)

Le derivate parziali che compaiono nella LPI sono dette **coefficienti di sensibilità** e vanno valutati nel valore medio della rispettiva variabile x_i .

Il valore dei coefficienti di sensibilità consente di determinare quale delle misure combinande contribuisce maggiormente all'incertezza della misura combinata

Volendo migliorare la misura combinata conviene investire soprattutto sulle misure combinande con un maggiore coefficiente di sensibilità

L'ipotesi che le x_i siano indipendenti **va verificata**, ad esempio con un test di correlazione

2.6 Esempio: volume di un cilindro

Siccome $V = \pi r^2 l$ vogliamo calcolare l'incertezza standard sul volume di un cilindro, note che siano le incertezze standard su raggio, u_r , e lunghezza, u_l

Entrambe le incertezze sono calcolate da un campione di 20 elementi, entrambi con deviazione standard 2.24 mm: $u = s/\sqrt{n} = 2.24/\sqrt{20} = 0.5$ mm

$$u_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 u_r^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial l}\right)^2 u_l^2} = \pi \bar{r} \sqrt{4\bar{l}^2 u_r^2 + \bar{r}^2 u_l^2}$$

Nel caso in cui sia $r = 120.0 \pm 0.5$ mm e $l = 450.0 \pm 0.5$, l'incertezza tipo combinata risulta pari a:

$$\begin{aligned} u_V &= \pi 120 \sqrt{4 \cdot 450^2 \cdot 0.5^2 + 120^2 \cdot 0.5^2} \\ &= 171 \times 10^3 \text{ mm}^3 \simeq 2 \times 10^5 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

e quindi il volume misurato è:

$$V = \pi \cdot 120^2 \cdot 450 = (20.4 \pm 0.2) \times 10^6 \text{ mm}^3 = (20.4 \pm 0.2) \text{ l}$$

2.7 Metodo Monte Carlo

Se la relazione $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ **non è differenziabile** oppure non è nota in forma analitica (ma solo numerica), allora la LPI non è applicabile

In questo caso la GUM prevede l'applicazione di un metodo numerico noto come *Monte Carlo*, perché, come alla roulette, prevede la generazione di numeri casuali **per simulare una distribuzione**:

1. si genera un elevato (≥ 10000) numero di n -uple x_1, x_2, \dots, x_n , generando per ogni x_i un numero casuale da una distribuzione **rappresentativa del caso reale**
2. si applica la $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a ciascuna n -upla, generando altrettanti valori di y
3. si studia la distribuzione empirica delle y così generate, calcolando l'intervallo di confidenza mediante il metodo dei quantili

Nota: il metodo non fa alcuna assunzione sulla distribuzione delle x_i , anzi, la sua efficacia sta proprio nel prescindere da qualsiasi ipotesi di normalità

2.8 Esempio: volume di un cilindro

```
library(PearsonDS)
set.seed(0)
N <- 10000
rbar = 120
ur = 0.5
lbar = 450
ul = 0.5
moments <- list(
  mean = lbar,
  variance = ul^2,
  skewness = 1,
  kurtosis = 4
)
data <- tibble(
  r = rnorm(N, rbar, ur),
  l = rpearson(N, moments = moments)
)
```

Primo passo: generazione dei campioni delle misure di raggio e lunghezza

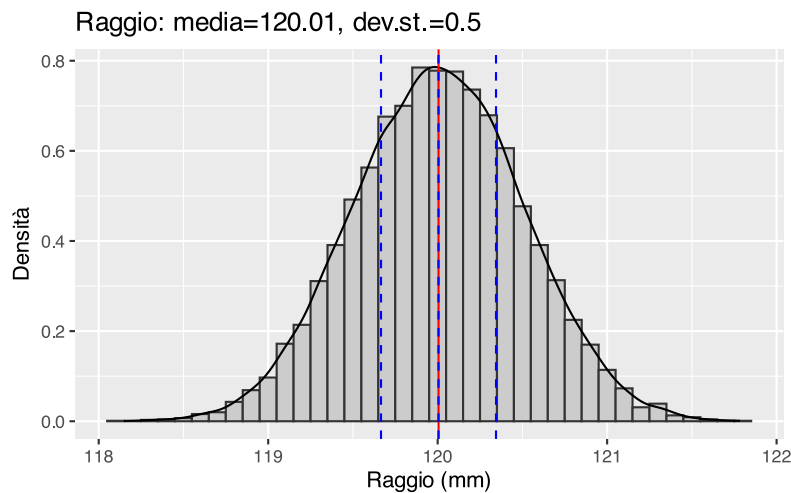
Dopo uno studio della tecnologia di produzione del cilindro, si accerta che

- la distribuzione del raggio è simmetrica, con media 120.0 mm e deviazione standard 0.5 mm
- la distribuzione della lunghezza è gobba, con media 450.0 mm e deviazione standard 0.5 mm

Si generano due campioni da 10 000 elementi ciascuno

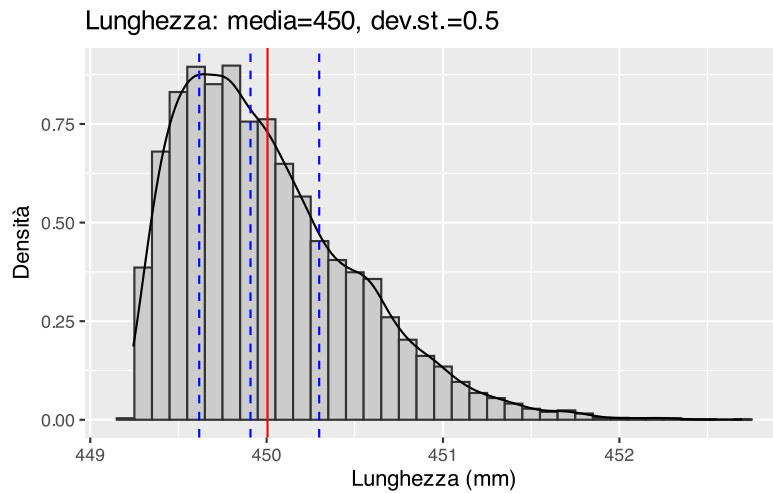
2.8.a Raggio

```
m <- round(mean(data$r),2)
s <- round(sd(data$r),2)
data %>% ggplot(aes(x=r, y=after_stat(density))) +
  geom_histogram(binwidth=ur/5, fill=gray(0.8),
  color=gray(0.2)) +
  geom_density() +
  geom_vline(xintercept = mean(data$r), color="red") +
  geom_vline(xintercept = quantile(data$r, c(0.25,
  0.5, 0.75)),
  color="blue", linetype=2) +
  labs(x="Raggio (mm)", y="Densità",
  title=glue("Raggio: media={m}, dev.st.={s}"))
```



2.8.b Lunghezza

```
m <- round(mean(data$l),2)
s <- round(sd(data$l),2)
data %>% ggplot(aes(x=l, y=after_stat(density))) +
  geom_histogram(binwidth=ur/5, fill=gray(0.8),
  color=gray(0.2)) +
  geom_density() +
  geom_vline(xintercept = mean(data$l), color="red") +
  geom_vline(xintercept = quantile(data$l, c(0.25,
  0.5, 0.75)),
  color="blue", linetype=2) +
  labs(x="Lunghezza (mm)", y="Densità",
  title=glue("Lunghezza: media={m}, dev.st.={s}"))
```



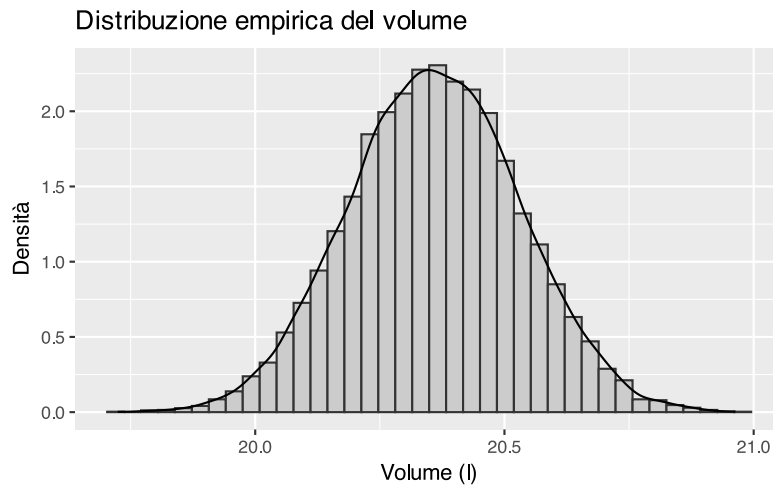
Dato che generiamo un'elevata quantità di campioni, secondo la GUM assumiamo che **l'incertezza standard coincida con la deviazione standard**

2.9 Esempio: volume di un cilindro

Secondo passo: calcolo del campione di misure derivate di volume

Si applica semplicemente la $V = \pi r^2 l$ a ciascuna coppia (r, l) generando altrettanti valori di V

```
data <- data %>% mutate(V=pi*r^2*l/1E6)
m <- round(mean(data$V), 2)
s <- round(sd(data$V), 2)
data %>% ggplot(aes(x=V, y=after_stat(density))) +
  geom_histogram(binwidth=s/5, fill=gray(0.8),
  color=gray(0.2)) +
  geom_density() +
  labs(x=TeX("Volume (l)"), y="Densità",
  title="Distribuzione empirica del volume")
```



2.10 Esempio: volume di un cilindro

Terzo passo: valutazione della distribuzione e calcolo dell'incertezza derivata

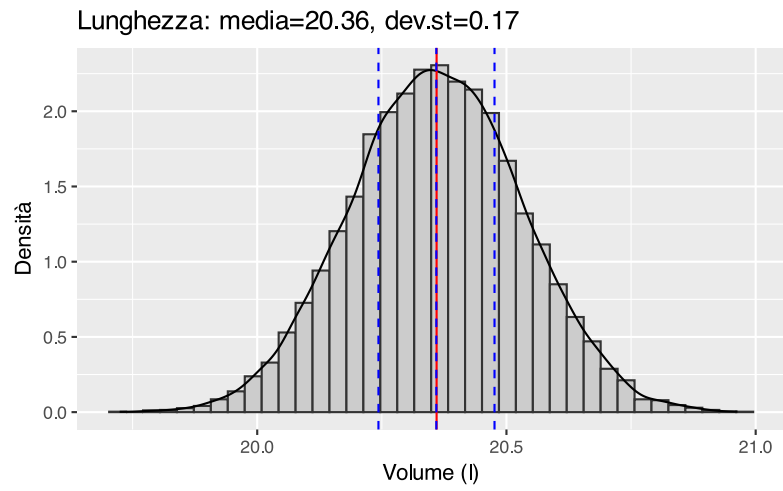
La media e la deviazione standard dei volumi calcolati corrispondono al valore atteso e all'incertezza standard sulla misura di volume

Considerando un'unica cifra significativa per l'incertezza e arrotondando la media alla stessa risoluzione, si ottiene

$$V = (20.4 \pm 0.2) \text{ l}$$

```
data <- data %>% mutate(V=pi*r^2*l/1E6)
m <- round(mean(data$V), 2)
s <- round(sd(data$V), 2)
data %>% ggplot(aes(x=V, y=after_stat(density))) +
  geom_histogram(binwidth=s/5, fill=gray(0.8),
  color=gray(0.2)) +
  geom_density() +
  geom_vline(xintercept = mean(data$V), color="red") +
  geom_vline(xintercept = quantile(data$V, c(0.25,
  0.5, 1-0.25)),
  color="blue", linetype=2) +
  labs(x=TeX("Volume (l)"), y="Densità",
  title=glue("Lunghezza: media={m}, dev.st={s}"))
```

Si noti, nuovamente, come la composizione di più distribuzioni, anche differenti, porti sempre a distribuzioni tendenti alla normale



Nota: un ulteriore vantaggio del metodo Monte Carlo è che consente di analizzare anche la **forma** della distribuzione della misura derivata (ad esempio mediante un diagramma Q-Q)